

13.6. 평면분.

<정리> 곡면 $S: z = g(x, y)$, $R: S$ 의 xy 평면에서의 상사영.

$g, g_x, g_y: R$ 에서 연속, $f(x, y, z): S$ 에서 정의. 연속.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) dS$$

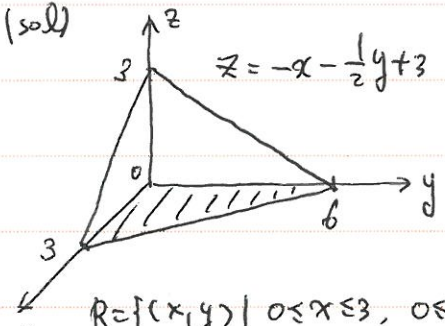
곡면의 넓이
 $\Delta S = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} \Delta A$

$$= \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dA$$

* $z = g(x, y)$ 의 평면의 법선벡터: $\mathbf{m} = \pm \langle g_x, g_y, -1 \rangle \Rightarrow dS = \|\mathbf{m}\| dA$

(ex) $S: 2x + y + 2z = 6$ 의 제1팔면체의 있는 부분, $\iint_S (y^2 + 2yz) dS = ?$

(sol)



$$z = -x - \frac{1}{2}y + 3$$

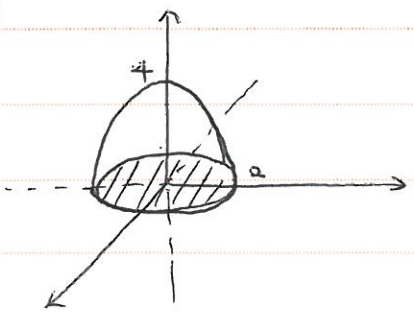
$$\iint_S (y^2 + 2yz) dS = \iint_R (y^2 + 2y \cdot \frac{1}{2}(6 - 2x - y)) \sqrt{1 + (-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2} dA$$

$$= \iint_R (6y - 2xy) \cdot \frac{3}{2} dA = \int_0^3 \int_0^{6-2x} (9y - 3xy) dy dx$$

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq -2x + 6\}$

(ex) $S: \text{포물면 } z = 4 - x^2 - y^2$ 에서 xy 평면의 위부분, $\iint_S z dS = ?$

(sol)



$$\iint_S z dS$$

$$= \iint_R (4 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



* 곡면의 매개변수 방정식

곡면 $S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$, 정의역 $R=\{(u,v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$

$\Rightarrow$ 곡면의 위치 벡터: $\langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle = \mathbf{r}(u,v)$

$\Rightarrow$ 법선 벡터: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \Rightarrow dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA = \sqrt{4x^2+4y^2+1} dA$

(ex) $S: x^2+y^2+z^2=4$, $\iint_S (3x^2+3y^2+3z^2) dS = ?$

(sol) $S: x=2\sin\phi\cos\theta, y=2\sin\phi\sin\theta, z=2\cos\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

$\Rightarrow \mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle 2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi \rangle$

$\Rightarrow \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \langle -4\sin^2\phi\cos\theta, -4\sin^2\phi\sin\theta, -4\sin\phi\cos\phi \rangle \Rightarrow \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{16\sin^2\phi}$

$\iint_S (3x^2+3y^2+3z^2) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin\phi d\phi d\theta = 192\pi$

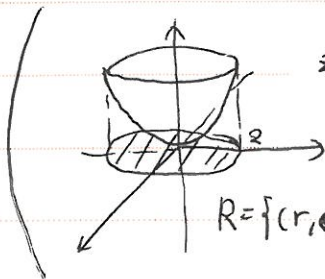
p. 846) 벡터장.

<정의> S : 방향을 줄 수 있는 곡면, N : 단위 법선 벡터, $F(x,y,z)$: S 위의 벡터장.

$\Rightarrow S$ 에서 F 의 회전분 (S 에서 F 의 유출량): $\iint_S F \cdot N dS$

(ex) 포물면 $z=x^2+y^2$ 의 $z=4$ 의 아래부분 (법선 방향: 위)에서 $F = \langle x, y, 0 \rangle$ 의 유출량?

(sol) $\iint_S F \cdot N dS = \iint_R \langle x, y, 0 \rangle \cdot \langle -2x, -2y, 1 \rangle dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -2r^2 \cdot r dr d\theta = -16\pi$



$z=x^2+y^2 \Rightarrow \pm \langle 2x, 2y, 1 \rangle \Rightarrow \langle -2x, -2y, 1 \rangle$

$\Rightarrow N = \frac{\langle -2x, -2y, 1 \rangle}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, dS = \sqrt{4x^2+4y^2+1} dA$

$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



부산대학교

609-735 부산광역시 금정구 부산대학로 63번길 2

Tel. (051) 510-1767 / Fax. (051) 581-1458

Department of Mathematics, College of Natural Sciences
Pusan National University

63 Beon-gil 2, Busandaehag-ro, Geumjeong-gu, Busan 609-735, Korea

Tel. +82-51-510-1767 Fax. +82-51-581-1458

13.7. 발산 정리.

$Q \subset \mathbb{R}^3$ 의 경계면 : S (유한 폐곡면), N : S 의 외향 단위 법선 벡터

$F(x, y, z)$ 의 1차 미분계수 : 연속 $\Rightarrow \iint_S F \cdot N dS = \iiint_Q \operatorname{div} F dV$

(S 내 F 의 유출량 = Q 내 F 의 발산량.)

(ex1) Q : 포물면 $z = 4 - x^2 - y^2$ 과 xy 평면으로 둘러싸인 영역.

꼭대기 S 내 $F(x, y, z) = \langle x^3, y^3, z^3 \rangle$ 의 유출량?

(sol) $\iint_S F \cdot N dS = \iiint_Q (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} (3r^2 + 3z^2) r dz dr d\theta = 96\pi$

$Q = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - r^2, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

(ex2) $F(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$, Q : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 발산정리 활용!

(sol) ① $N = \frac{\langle 2x, 2y, 2z \rangle}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \langle x, y, z \rangle$

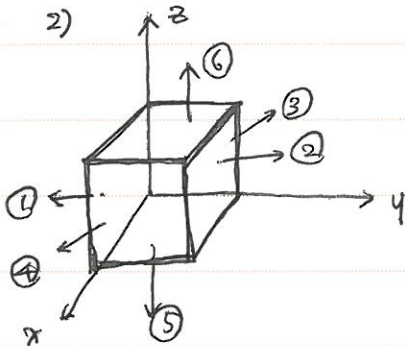
$\iint_S F \cdot N dS = \iint_S x^2 + y^2 + z^2 dS = \iint_S 1 dS = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$

② $\iiint_Q \operatorname{div} F dV = \iiint_Q 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 4\pi$



(ex3) $Q: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, $F(x, y, z) = \langle 2xz, y^2, -xz \rangle$, 발산정리 확인?

(sol) 1) $\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iiint_Q (2z + 2y - x) \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2z + 2y - x) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2}$



① $y=0: N = \langle 0, -1, 0 \rangle \Rightarrow F \cdot N = -y^2 = 0$

② $y=1: N = \langle 0, 1, 0 \rangle \Rightarrow F \cdot N = y^2 = 1$

$\Rightarrow \iint_S F \cdot N \, dS = \iint_S 1 \, dS = 1$

③ $x=0: N = \langle -1, 0, 0 \rangle \Rightarrow F \cdot N = -2xz = 0$

④ $x=1: N = \langle 1, 0, 0 \rangle \Rightarrow F \cdot N = 2xz = 2z$

$\Rightarrow \iint_S F \cdot N \, dS = \int_0^1 \int_0^1 2z \, dz \, dy = 1$

⑤ $z=0: N = \langle 0, 0, -1 \rangle \Rightarrow F \cdot N = xz = 0$

⑥ $z=1: N = \langle 0, 0, 1 \rangle \Rightarrow F \cdot N = -xz = -x$

$\Rightarrow \iint_S F \cdot N \, dS = \int_0^1 \int_0^1 -x \, dx \, dy = -\frac{1}{2}$

$\therefore \iint_S F \cdot N \, dS = \frac{3}{2}$

$\therefore \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot N \, dS$



13. Stokes 정리

S : 방향성을 갖는 구별적으로 매끄러운 곡면, N : 단위법선 벡터.

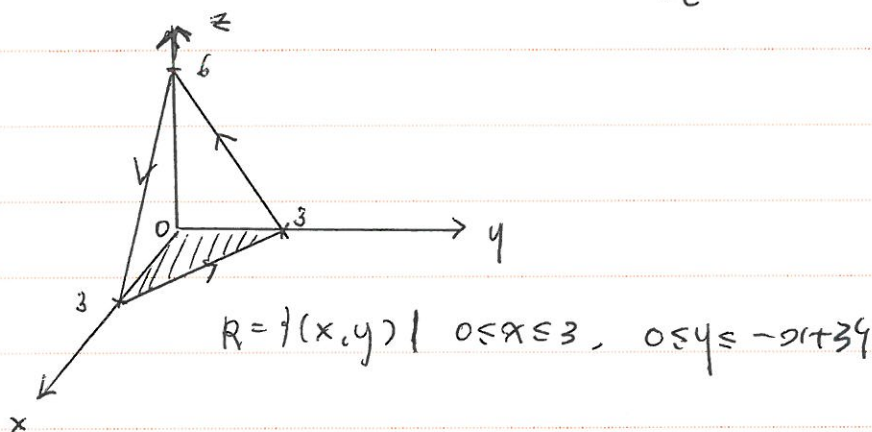
C : 구별적으로 매끄러운 닫힌 궤적선, 평면의 경계선, 양의 방향성 (오른손 법칙)

$$F_x, F_y, F_z : \text{연속} \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

($\mathbf{F}$: 해이면 곡선 C 를 따라 $\mathbf{F}$ 가 한 일 = S 의 $\text{curl } \mathbf{F}$ 의 유출량)

(ex) $C: 2x + 2y + z = 6$ 이 방향성을 갖는 삼각형, $\int_C \langle -y^2, z, x \rangle \cdot d\mathbf{r} = ?$

(sol)



$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_R \langle -y^2, z, x \rangle \cdot \frac{\langle 2, 2, 1 \rangle}{\sqrt{4+4+1}} \sqrt{4+4+1} \, dA \\ &= \iint_R (-4 + 2y) \, dA = \int_0^3 \int_0^{-x+3} (-4 + 2y) \, dy \, dx = -9 \end{aligned}$$

p. 862) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$: 직접계산.



부산대학교

609-735 부산광역시 금정구 부산대학교 63번길 2

Tel. (051) 510-1767 / Fax. (051) 581-1458

Department of Mathematics, College of Natural Sciences
Pusan National University

63 Beon-gil 2, Busandaehag-ro, Geumjeong-gu, Busan 609-735, Korea
Tel. +82-51-510-1767 Fax. +82-51-581-1458

(ex) $S: z = 4 - x^2 - y^2$ 의 xy 평면의 윗부분, 단위법선 벡터를 포물면 바깥을 향하도록.

$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle zx, zy, z^3 \rangle$ 일때 스칼라 곱의 값은? $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
 $= \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$

(sol) ① $C: x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C zx dx + zy dy + z^3 dz = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta d\theta = 0$$

② $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \langle 0, x, 0 \rangle, \mathbf{N} = \frac{\langle 2x, 2y, 1 \rangle}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$

$$R = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_R \langle 0, x, 0 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle dA$$

$$= \iint_R 2xy dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r\cos\theta \cdot r\sin\theta r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \sin(2\theta) d\theta = 0$$

